4. Отношение порядка, решетки, булевы алгебры.

Частичный порядок

Частичным порядком на множестве A называется бинарное отношение ≤ (обычно так обозначают), обладающее тремя свойствами:

1. Рефлексивность:  
   ∀x∈A:  x≤x.
2. Антисимметричность (кососимметричность):  
   ∀x,y∈A:  (x≤y ∧ y≤x)  ⇒  x=y
3. Транзитивность:  
   ∀x,y,z∈A:  (x≤y ∧ y≤z)  ⇒  x≤z.

Такое отношение ≤ (или R) называют ещё частичным порядком, а пару (A,≤) — частично упорядоченным множеством, или частичным порядком (poset).

Примеры:

* Отношение «≤» на множестве натуральных чисел N или целых Z — классический линейный порядок (что также является частным случаем частичного порядка).
* Отношение «делимости» ∣ на множестве натуральных чисел (a≤b  ⟺  a∣b) является частичным порядком (оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно), но не линейным, так как некоторые элементы не сравнимы (например, 2 и 3 не делят друг друга).
* Отношение «⊆» (включение) на множестве всех подмножеств некоторого множества A (то есть на булевой алгебре подмножеств) — тоже классический пример частичного порядка.

1.2. Линейный (тотальный) порядок

Если в дополнение к свойствам частичного порядка выполняется принцип сравнимости:

∀x,y∈A:  x≤y  или  y≤x,

то порядок называется линейным (или тотальным). Например, ≤ на действительных числах R — линейный порядок, тогда как «делимость» на N — частичный, но не линейный.

2. Решётки

Решётки — это важные алгебраические структуры, в которых есть операции «∧» (чаще называют «meet», «сечение») и «∨» (чаще «join», «объединение»), связанные с частичным порядком.

2.1. Определение решётки

Решёткой называют систему (L,≤), являющуюся частично упорядоченным множеством, в котором для любых двух элементов x,y∈L существуют:

* Наименьшее верхнее bound (join), обычно обозначают x∨y, то есть минимальный элемент, который выше (или равен) и x, и y.
* Наибольшее нижнее bound (meet), обычно обозначают x∧y.

Формально:

1. x∨y — это наименьший (по ≤) элемент, который ≥x и ≥y.
2. x∧y — наибольший элемент, который ≤x и ≤y.

Если такие элементы существуют для каждых x и y в L, тогда (L,≤) называют решёткой.

Альтернативное (эквивалентное) определение

Иногда решётку задают алгебраически как множество с двумя бинарными операциями ∨ и ∧, которые удовлетворяют ряду аксиом (коммутативность, ассоциативность, идемпотентность, законы поглощения). Тогда ≤ можно ввести как: x≤y тогда и только тогда, когда x∨y=y (или эквивалентно x∧y=x).

2.2. Примеры решёток

1. Множество подмножеств:  
   Пусть P(A) — множество всех подмножеств A, упорядоченное по включению ⊆.
   * X∨Y=X∪Y (объединение),
   * X∧Y=X∩Y (пересечение).  
     Это классическая решётка (причём дистрибутивная, подробнее ниже).
2. Натуральные числа с делимостью:  
   Принимаем ≤ как «делит». Тогда:
   * x∨y = наименьшее общее кратное (НОК) lcm(x,y)
   * x∧y = наибольший общий делитель (НОД) gcd(x,y)   
     Это тоже решётка.
3. Реальные числа с обычным порядком:
   * x∨y=max(x,y),
   * x∧y=min(x,y)  
     Тоже образует решётку (здесь все элементы попарно сравнимы, так что это ещё и линейный порядок).

2.3. Дистрибутивные и булевы решётки

Дистрибутивная решётка

Решётка (L,∨,∧) называется дистрибутивной, если операции ∧ и ∨ распределяются друг относительно друга:

x∧(y∨z)  =  (x∧y)∨(x∧z), x∨(y∧z)  =  (x∨y)∧(x∨z).

(Для решёток достаточно проверить одну из дистрибутивных аксиом, вторая будет следовать.)

Пример: P(A) с ∪ и ∩ — дистрибутивная решётка.  
Противопример: есть решётки (например, «решётка подгрупп» группы) недистрибутивные; там «закон дистрибутивности» не выполняется.

3. Булевы алгебры

Булевой алгеброй называют дистрибутивную решётку, в которой есть:

* Наименьший (0) и наибольший (1) элементы,
* Для каждого элемента xx есть дополнение xˉ (или x′), удовлетворя:

x∨xˉ=1, x∧xˉ=0.

По сути, булева алгебра — это дистрибутивная решётка с «единицей» и «нулём», где каждый элемент имеет «комплемент».

3.1. Пример: Алгебра подмножеств

* P(A) (множество всех подмножеств A) с операциями ∪ и ∩, а также операцией дополнения X↦A∖X.
* Здесь 0=∅, 1=A, а Xˉ=A∖X.
* Все аксиомы выполняются (это классический пример булевой алгебры).

3.2. Пример: Алгебра логических выражений

Рассматриваем множество высказываний (логических формул), где операция ∧ — логическое И, ∨ — логическое ИЛИ, ¬x — отрицание x. Тогда:

* 0 соответствует «ложь»,
* 1 соответствует «истина»,
* xˉ=¬x  
  Это тоже булева алгебра (она дистрибутивна, есть комплементарные пары и т.д.).

3.3. Связь булевой алгебры и дистрибутивной решётки

Каждая булева алгебра — это частный случай дистрибутивной решётки с дополнительными элементами «0», «1» и операцией дополнения (комплемента). Кроме того, любая конечная булева алгебра «изоморфна» булевой алгебре подмножеств некоторого конечного множества (это классическая теорема Стоуна–Бурхейса).